福建师范大学数计学院

空间分解与约当标准形

张圣贵

2006 年 4 月 22 日

空间分解与约当标准形

- 一　问题提出
- 二　空间分解
- 三　线性变换的最小多项式
- 四　幂零变换的结构
- 五　线性变换的约当标准形

一. 问题提出

设V是域F上的n维向量空间, $\mathcal{A}: V \to V$是一个映射, 若对于$\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in F$有

$$\mathcal{A}(k\alpha + l\beta) = k\mathcal{A}(\alpha) + l\mathcal{A}(\beta)$$

则称**A**是V上的线性变换.

$Hom(V, V)$表示V上的所有线性变换的集合, 关于线性变换的加法, 数乘和合成(乘法)构成一个F上的代数.

$M_n(F)$表示F上所有n阶矩阵的集合, 关于矩阵的加法, 数乘和乘法也构成一个F上的代数.

取定V的一个基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 对于$\forall \mathcal{A} \in Hom(V, V)$, 有

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

其中$A \in M_n(F)$. 称A是线性变换$\mathcal{A}$在基$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$下的矩阵.

定义映射

$$\psi : Hom(V, V) \to M_n(F),\ \psi(\mathcal{A}) = A$$

则ψ是$Hom(V, V)$到$M_n(F)$的代数同构映射.

$$Hom(V, V) \cong M_n(F)$$

问题: 一个线性变换在不同基下的矩阵有什么关系?

设$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$是$V$的另一个基, 对于给定的$\mathcal{A} \in Hom(V, V)$, 设

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)T$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A$$

$$\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)B$$

则

$$B = T^{-1}AT$$

问题:

(1) 从线性变换角度, 对于给定的$\mathcal{A} \in Hom(V, V)$是否存在$V$的一个基$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$使得$\mathcal{A}$在它下的矩阵具有最简单形式? 最简单形式是什么?

(2) 从矩阵角度, 矩阵相似是$M_n(F)$上的一个等价关系, 对于给定的$A \in M_n(F)$, 包含A的相似类中, 最简单的代表元是什么?

二. 空间分解

设$V_1, V_2, \cdots, V_s$是域F上的向量空间V的子空间, 若对于$\forall \alpha \in V$, 存在唯一一组向量$\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \cdots, \alpha_s \in V_s$使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s$$

则称V可分解为$V_1, V_2, \cdots, V_s$的直和, 记作

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

结论: 若$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 且$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{it_i}$是$V_i$的一个基, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{st_s}$是$V$的一个基.

问题: 对于给定的$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 是否存在V的一个基, 使得$\mathcal{A}$在这个基下的矩阵为对角矩阵?

如果有$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$, 且$\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i$, 即对于$\forall \xi \in V_i$, 都有$\mathcal{A}(\xi) = \lambda_i \xi$, 其中$\mathcal{I}_i$为$V_i$的单位变换, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则取V_i的基$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{it_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, $\mathcal{A}$在V的基$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{st_s}$下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

Home Page

Title Page

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Go Back

Full Screen

Close

Quit

对于$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 若存在一个非零向量ξ使得

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi,\ \lambda \in F$$

则称λ是$\mathcal{A}$的特征值, 称ξ是$\mathcal{A}$的属于特征值λ的特征向量.

设λ是$\mathcal{A}$的一个特征值, 令

$$V_\lambda = \{\alpha | \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$$

则V_λ是V的子空间, 称V_λ为$\mathcal{A}$的属于特征值λ的特征子空间.

设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$是$\mathcal{A}$的所有互不相同的特征值, 设$dimV_{\lambda_i}=n_i$, 若

$$V=V_{\lambda_1}\oplus V_{\lambda_2}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$$

取V_{λ_i}的一个基$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{in_i}$, $i=1,2,\cdots,s$, 则$\mathcal{A}$在V的基$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1n_1},\cdots,\alpha_{s1},\alpha_{s2},\cdots,\alpha_{sn_s}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

称$\mathcal{A}$可对角化.

若实数域$\mathbb{R}$上的向量空间V的线性变换$\mathcal{A}$在V的一个基下的矩阵为对称矩阵, 则$\mathcal{A}$可以对角化.

问题: 若$\mathcal{A} \in Hom(V, V)$可对角化, 如何找$V$的一个基, 使得$\mathcal{A}$在这个基下的矩阵为对角矩阵?

计算步骤:

1. 任取V的一个基$\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n$, 写出$\mathcal{A}$在此基下的矩阵$A$;

2. 计算A的特征多项式$f_A(\lambda)$, 并求出$f_A(\lambda)$所有不同的根$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$;

3. 求出A的属于λ_i的所有线性无关的特征向量$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \cdots, \eta_{in_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$;

4. 令$\alpha_{ij} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots, \epsilon_n)\eta_{ij}$, $j = 1, 2, \cdots, n_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 那么$\mathcal{A}$在V的基$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sn_s}$下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

问题: 对于不可对角化的线性变换$\mathcal{A}$, 能否在V中找到一个适当的基, 使得$\mathcal{A}$在这个基下的矩阵具有最简单形式? 这个最简单形式是什么样的矩阵?

设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, W是V的子空间. 若对于$\forall \alpha \in W$有$\mathcal{A}(\alpha) \in W$, 即$\mathcal{A}(W) \subseteq W$, 则称$W$是$\mathcal{A}$的不变子空间.

$\mathcal{A}$的核$Ker\mathcal{A} = \{\alpha | \mathcal{A}(\alpha) = 0\}$和象$Im\mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\alpha) | \alpha \in V\}$都是$\mathcal{A}$的不变子空间, $\mathcal{A}$的特征子空间也是$\mathcal{A}$的不变子空间.

对于给定的$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 若存在$\mathcal{A}$的不变子空间$V_1, V_2, \cdots, V_s$使得

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

设$dimV_i = r_i$, 取V_i的一个基$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则$\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1r_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sr_s}$是$V$的一个基, 且$\mathcal{A}$在它下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中$A_i \in M_{r_i}(F)$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

问题: 对于$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 如何找出它的一些非平凡的不变子空间?

命题 对于$\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in Hom(V,V)$, 若$\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$, $Ker\mathcal{B}$, $Im\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$的特征子空间都是$\mathcal{A}$的不变子空间.

由此命题可知, 对于$\forall \mathcal{A} \in Hom(V,V)$, $\forall f(x) \in F[x]$, 有$Ker f(\mathcal{A})$, $Im f(\mathcal{A})$, $f(\mathcal{A})$的特征子空间都是$\mathcal{A}$的不变子空间.

问题: 能否找到一些多项式$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x) \in F[x]$,使得

$$V = Ker f_1(\mathcal{A}) \oplus Ker f_2(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus Ker f_s(\mathcal{A})\ ?$$

命题 对于$\forall \mathcal{A} \in Hom(V, V)$, 若在$F[x]$中, $f(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_s(x)$, 其中$f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)$两两互素, 则

$$Ker f(\mathcal{A}) = Ker f_1(\mathcal{A}) \oplus Ker f_2(\mathcal{A}) \oplus \cdots \oplus Ker f_s(\mathcal{A})$$

问题: 是否存在$f(x) \in F[x]$使得$Ker f(\mathcal{A}) = V$, 即$f(\mathcal{A}) = 0$?

设$dim V = n$, 则$dim Hom(V, V) = n^2$, 从而$I, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \cdots, \mathcal{A}^{n^2}$线性相关,

故存在不全为零的数$k_0, k_1, k_2, \cdots, k_{n^2}$使得

$$k_0 I + k_1 \mathcal{A} + k_2 \mathcal{A}^2 + \cdots + k_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n^2} x^{n^2}$$

则$f(\mathcal{A}) = 0$, $f(x)$称为$\mathcal{A}$的零化多项式.

问题: 怎样轻松求出一个零化多项式?

Hamiton-Cayley 定理 设$\mathcal{A} \in Hom(V, V)$, 则$\mathcal{A}$的特征多项式$f(\lambda)$是$\mathcal{A}$的一个零化多项式.

设$\mathcal{A}\in Hom(V,V)$, 若$\mathcal{A}$的特征多项式$f(\lambda)$在$F[x]$中可分解成

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

则

$$V=Ker(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{r_1}\oplus Ker(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{r_2}\oplus\cdots\oplus Ker(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{r_s}$$

其中$Ker(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{r_i}$称为$\mathcal{A}$的根子空间.

$Ker(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{r_i}$上的线性变换$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})|_{W_i}$满足$[(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})|_{W_i}]^{r_i}=0$.

问题: 是否存在次数比特征多项式的次数更低的零化多项式?

例 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征多项式为$(\lambda-1)^3$, $(\lambda-1)^2$也是它的零化多项式, 而矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

没有次数小于3的零化多项式.

三. 线性变换的最小多项式

设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 在$\mathcal{A}$的所有非零零化多项式中, 次数最低的首项系数为1的多项式称为$\mathcal{A}$的**最小多项式**, 记作$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$.

(1) $\mathcal{A}$的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$是唯一的.

(2) $\mathcal{A}$的任意一个零化多项式都是其最小多项式的倍式.

(3) $\mathcal{A}$的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$与其特征多项式$f(\lambda)$在域F中有相同的根(重数可以不同).

下列定理给出了最小多项式的一种求法.

定理 设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 如果存在$\mathcal{A}$的一些非平凡不变子空间$W_1, W_2, \cdots, W_s$使得

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

则$\mathcal{A}$的最小多项式

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = [m_{\mathcal{A}|_{W_1}}(\lambda), m_{\mathcal{A}|_{W_2}}(\lambda), \cdots, m_{\mathcal{A}|_{W_s}}(\lambda)]$$

设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 若存在一个正整数l使得$\mathcal{A}^l = 0$, 则称$\mathcal{A}$是幂零变换; 使得$\mathcal{A}^l = 0$成立的最小正整数l称为幂零指数.

幂零指数为l的幂零变换$\mathcal{A}$的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = \lambda^l$.

域F上形如

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

的一个r阶矩阵称为一个r阶约当块, 记作$J_r(a)$. 由若干个约当块组成的分块对角矩阵称为约当形矩阵

利用最小多项式可以刻画可对角化线性变换:

定理 设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 则$\mathcal{A}$可对角化的充分必要条件为它的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$在$F[\lambda]$中可分解成互不相同的一次因式乘积.

问题: 如何利用最小多项式研究不可对角化的线性变换的结构?

设$\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 若$\mathcal{A}$的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$在$F[\lambda]$中可分解为一次因式乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$是$F$中两两不同的元素, 则

$$Ker\ m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = Ker(\mathcal{A}-\lambda_1\mathcal{I})^{l_1} \oplus Ker(\mathcal{A}-\lambda_2\mathcal{I})^{l_2} \oplus \cdots \oplus Ker(\mathcal{A}-\lambda_s\mathcal{I})^{l_s}$$

因$Ker\ m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = V$, 令$W_i = Ker(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{I})^{l_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则W_i是$\mathcal{A}$的不变子空间, $i = 1, 2, \cdots, s$, 且

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$

设$dimW_i = n_i$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 在W_i中取一个基$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$, 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sn_s}) \\ = \ & (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1n_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{sn_s}) \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{A}|_{W_i}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}) A_i,$$

$i = 1, 2, \cdots, s$.

为了使

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$$

最简单, 就应使A_i最简单, $i = 1, 2, \cdots, s$. 因此, 我们研究W_i上的线性变换$\mathcal{A}|_{W_i}$, $i = 1, 2, \cdots, s$.

$\mathcal{A}|_{W_i}$的最小多项式是$m_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}$, 令$\mathcal{B}_i = \mathcal{A}|_{W_i} - \lambda_i \mathcal{I}$, 则$\mathcal{B}_i$是$W_i$上的幂零指数为$l_i$的幂零变换, 且

$$\mathcal{B}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in_i})(A_i - \lambda_i I_{n_i})$$

问题： 设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$是幂零变换, 且幂零指数为$l$, 能否在$W$中找到一个基, 使得$\mathcal{B}$在这个基下的矩阵最简单?

四. 幂零变换的结构

命题 设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W,W)$是幂零变换, 且幂零指数为l, 则存在$\xi \in W$, 使得向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

线性无关, 从而$l \leq dimW$.

若$l = dimW$, 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

是W的一个基, 从而

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi) = (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

若$l < dimW$, 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

不是W的一个基, 但由它们生成的子空间

$$< \mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi >$$

是$\mathcal{B}$的不变子空间, 称为由ξ生成的$\mathcal{B}-$循环子空间, 记作$Z_l(\xi; \mathcal{B})$. 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}|_{Z_l(\xi;\mathcal{B})}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi) \\ = \; & (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \cdots, \mathcal{B}\xi, \xi) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

问题: W能否分解为一些$\mathcal{B}-$循环子空间的直和?

先分析$Z_l(\xi;\mathcal{B})$的特点:

$$
\begin{aligned}
& \forall \alpha \in Z_l(\xi;\mathcal{B}) \\
\Leftrightarrow \ & \alpha = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1}\xi + \cdots + k_1\mathcal{B}\xi + k_0\xi = (k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I})\xi \\
\Leftrightarrow \ & \alpha = h(\mathcal{B})\xi,\ h(\mathcal{B}) = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I}
\end{aligned}
$$

则

$$Z_l(\xi;\mathcal{B}) = \{h(\mathcal{B})\xi | h(\lambda) \in F[\lambda], h(\lambda) = 0 \text{ or } deg h(\lambda) < l\}$$

因此, 引进下列概念:

设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W,W)$, $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是$W$的一个向量组. 对于$\alpha \in W$, 若存在$h_1(\lambda),h_2(\lambda),\cdots,h_s(\lambda) \in F[\lambda]$, 使得

$$\alpha = h_1(\mathcal{B})\eta_1 + h_2(\mathcal{B})\eta_2 + \cdots + h_s(\mathcal{B})\eta_s$$

则称α可由$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$ $F[\lambda]-$表出, 称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_s$是$W$的$\mathcal{B}-$生成元系.

设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W,W)$, 若$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$是$W$的一个$\mathcal{B}-$生成元系, 而$W$的任何$m-1$个向量都不是$W$的$\mathcal{B}-$生成元系, 则称$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m$是$W$的一个最小$\mathcal{B}-$生成元系.

W一定存在最小$\mathcal{B}-$生成元系, 但W的最小$\mathcal{B}-$生成元系不唯一.

利用最小$\mathcal{B}-$生成元系, 可得到

定理 设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$是幂零变换, 则$W$可分解为一些$\mathcal{B}-$子空间的直和.

利用上述定理, 可以得到幂零变换的结构定理.

定理 设W是F上的r维向量空间, $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$是幂零变换, 且幂零指数为$l$, 则$W$中存在一个基, 使得$\mathcal{B}$在此基下的矩阵$B$为约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元都是0, 且阶数不超过l, 约当块总数等于$\mathcal{B}$的特征子空间W_0的维数, t阶约当块的个数$N(t)$为

$$N(t) = dim[Im(\mathcal{B}^{t+1})] + dim[Im(\mathcal{B}^{t-1})] - 2dim[Im(\mathcal{B}^{t})]$$

这个约当形矩阵称为幂零变换$\mathcal{B}$的约当标准形, 除了约当块的排列次序外, $\mathcal{B}$的约当标准形是唯一的.

推论 设B是域F上的幂零矩阵, 其幂零指数为l, 则B相似于一个约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元为0, 且级数不超过l, 约当块的总数等于B的特征子空间的维数(即齐次线性方程组$BX = 0$的解空间的维数), t级约当块的个数$N(t)$为

$$N(t) = rank\ B^{t+1} + rank\ B^{t-1} - 2rank\ B^t$$

五. 线性变换的约当标准形

利用幂零变换的结构定理, 可以得到最小多项式可分解成一次因式乘积的线性变换的结构.

定理 设V是F上的n维向量空间, $\mathcal{A} \in Hom(V,V)$, 若$\mathcal{A}$的最小多项式$m_{\mathcal{A}}(\lambda)$在$F[\lambda]$中可分解为一次因式的乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{l_1}(\lambda-\lambda_2)^{l_2}\cdots(\lambda-\lambda_s)^{l_s}$$

则V中存在一个基, 使得$\mathcal{A}$在这个基下的矩阵A为约当形矩阵, 其主对角元为$\mathcal{A}$的全部特征值; 主对角元为λ_j的约当块总数N_j为

$$N_j = dimV - dim[Im(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})],\ j=1,2,\cdots,s,$$

且其中每个约当块的阶数不超过l_j, t阶约当块$J_t(\lambda_j)$的个数$N_j(t)$为

$$N_j(t) = dim\{Im[(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t+1}]\}+dim\{Im[(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t-1}]\}-2dim\{Im[(\mathcal{A}-\lambda_j\mathcal{I})^{t}]\}$$

这个约当形矩阵称为$\mathcal{A}$的约当标准形, 除了约当块的排列次序外, $\mathcal{A}$的约当标准形是唯一的.

推论 设A是域F上的n级矩阵, 若A的最小多项式$m(\lambda)$在$F[\lambda]$中可分解为一次因式的乘积:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1}(\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

则A相似于一个约当形矩阵, 其中主对角线上的元素是A的全部特征值; 主对角元为λ_i的约当块总数N_j为

$$N_j = n - rank(A - \lambda_i I),\ j = 1, 2, \cdots, s,$$

且其中每个约当块的级数不超过l_j, t级约当块的个数$N_j(t)$为

$$N_j(t) = rank(A - \lambda_j I)^{t+1} + rank(A - \lambda_j I)^{t-1} - 2rank(A - \lambda_j I)^t$$

谢谢!