



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 1 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

福建师范大学数计学院



# 空间分解与约当标准形

张圣贵

2006年4月22日

Home Page

Title Page



Page 2 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

# 空间分解与约当标准形

- 一 问题提出
- 二 空间分解
- 三 线性变换的最小多项式
- 四 幂零变换的结构
- 五 线性变换的约当标准形



[Home Page](#)

[Title Page](#)



Page 3 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



## 一. 问题提出

设 $V$ 是域 $F$ 上的 $n$ 维向量空间,  $\mathcal{A}: V \rightarrow V$ 是一个映射, 若对于 $\forall \alpha, \beta \in V, \forall k, l \in F$ 有

$$\mathcal{A}(k\alpha + l\beta) = k\mathcal{A}(\alpha) + l\mathcal{A}(\beta)$$

则称 $\mathcal{A}$ 是 $V$ 上的线性变换.

$Hom(V, V)$ 表示 $V$ 上的所有线性变换的集合, 关于线性变换的加法, 数乘和合成(乘法)构成一个 $F$ 上的代数.

$M_n(F)$ 表示 $F$ 上所有 $n$ 阶矩阵的集合, 关于矩阵的加法, 数乘和乘法也构成一个 $F$ 上的代数.

[Home Page](#)

[Title Page](#)

[◀](#) [▶](#)

[◀](#) [▶](#)

Page 4 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)

取定 $V$ 的一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , 对于 $\forall \mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 有

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

其中 $A \in M_n(F)$ . 称 $A$ 是线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵.

定义映射

$$\psi : \text{Hom}(V, V) \rightarrow M_n(F), \psi(\mathcal{A}) = A$$

则 $\psi$ 是 $\text{Hom}(V, V)$ 到 $M_n(F)$ 的代数同构映射.

$$\text{Hom}(V, V) \cong M_n(F)$$

**问题:** 一个线性变换在不同基下的矩阵有什么关系?



Home Page

Title Page



Page 5 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ 是 $V$ 的另一个基, 对于给定的 $A \in Hom(V, V)$ , 设

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)T$$

$$\mathcal{A}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)A$$

$$\mathcal{A}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)B$$

则

$$B = T^{-1}AT$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

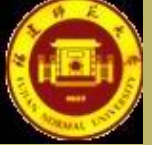
Page 6 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



问题:

(1) 从线性变换角度, 对于给定的  $A \in \text{Hom}(V, V)$  是否存在  $V$  的一个基  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  使得  $A$  在它下的矩阵具有最简单形式? 最简单形式是什么?

(2) 从矩阵角度, 矩阵相似是  $M_n(F)$  上的一个等价关系, 对于给定的  $A \in M_n(F)$ , 包含  $A$  的相似类中, 最简单的代表元是什么?

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 7 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

## 二. 空间分解

设 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 是域 $F$ 上的向量空间 $V$ 的子空间, 若对于 $\forall \alpha \in V$ , 存在唯一一组向量 $\alpha_1 \in V_1, \alpha_2 \in V_2, \dots, \alpha_s \in V_s$ 使得

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$$

则称 $V$ 可分解为 $V_1, V_2, \dots, V_s$ 的直和, 记作

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

**结论:** 若 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$ , 且 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{it_i}$ 是 $V_i$ 的一个基,  $i = 1, 2, \dots, s$ , 则 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1t_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{st_s}$ 是 $V$ 的一个基.



Home Page

Title Page



Page 8 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit





**问题:** 对于给定的  $\mathcal{A} \in Hom(V, V)$ , 是否存在  $V$  的一个基, 使得  $\mathcal{A}$  在这个基下的矩阵为对角矩阵?

如果有  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ , 且  $\mathcal{A}|_{V_i} = \lambda_i \mathcal{I}_i$ , 即对于  $\forall \xi \in V_i$ , 都有  $\mathcal{A}(\xi) = \lambda_i \xi$ , 其中  $\mathcal{I}_i$  为  $V_i$  的单位变换,  $i = 1, 2, \cdots, s$ , 则取  $V_i$  的基  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{it_i}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, s$ ,  $\mathcal{A}$  在  $V$  的基  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \cdots, \alpha_{1t_1}, \cdots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \cdots, \alpha_{st_s}$  下的矩阵为对角矩阵

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

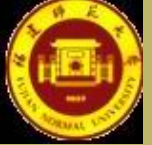
Page 9 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若存在一个非零向量  $\xi$  使得

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \lambda \in F$$

则称  $\lambda$  是  $\mathcal{A}$  的**特征值**, 称  $\xi$  是  $\mathcal{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的**特征向量**.

设  $\lambda$  是  $\mathcal{A}$  的一个特征值, 令

$$V_\lambda = \{\alpha \mid \mathcal{A}\alpha = \lambda\alpha, \alpha \in V\}$$

则  $V_\lambda$  是  $V$  的子空间, 称  $V_\lambda$  为  $\mathcal{A}$  的属于特征值  $\lambda$  的**特征子空间**.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

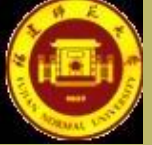
Page 10 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ 是 $\mathcal{A}$ 的所有互不相同的特征值, 设 $\dim V_{\lambda_i} = n_i$ , 若

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$$

取 $V_{\lambda_i}$ 的一个基 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , 则 $\mathcal{A}$ 在 $V$ 的基 $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

称 $\mathcal{A}$ 可对角化.

若实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间 $V$ 的线性变换 $\mathcal{A}$ 在 $V$ 的一个基下的矩阵为对称矩阵, 则 $\mathcal{A}$ 可以对角化.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 11 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**问题:** 若  $A \in \text{Hom}(V, V)$  可对角化, 如何找  $V$  的一个基, 使得  $A$  在这个基下的矩阵为对角矩阵?

**计算步骤:**

1. 任取  $V$  的一个基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ , 写出  $A$  在此基下的矩阵  $A$ ;
2. 计算  $A$  的特征多项式  $f_A(\lambda)$ , 并求出  $f_A(\lambda)$  所有不同的根  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ ;
3. 求出  $A$  的属于  $\lambda_i$  的所有线性无关的特征向量  $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{in_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ;
4. 令  $\alpha_{ij} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n)\eta_{ij}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ , 那么  $A$  在  $V$  的基  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}$  下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{n_2} & & \\ & & \dots & \\ & & & \lambda_s I_{n_s} \end{pmatrix}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 12 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**问题:** 对于不可对角化的线性变换 $\mathcal{A}$ , 能否在 $V$ 中找到一个适当的基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵具有最简单形式? 这个最简单形式是什么样的矩阵?

设 $\mathcal{A} \in Hom(V, V)$ ,  $W$ 是 $V$ 的子空间. 若对于 $\forall \alpha \in W$ 有 $\mathcal{A}(\alpha) \in W$ , 即 $\mathcal{A}(W) \subseteq W$ , 则称 $W$ 是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

$\mathcal{A}$ 的核 $Ker \mathcal{A} = \{\alpha | \mathcal{A}(\alpha) = 0\}$ 和象 $Im \mathcal{A} = \{\mathcal{A}(\alpha) | \alpha \in V\}$ 都是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间,  $\mathcal{A}$ 的特征子空间也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 13 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



对于给定的  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若存在  $\mathcal{A}$  的不变子空间  $V_1, V_2, \dots, V_s$  使得

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_s$$

设  $\dim V_i = r_i$ , 取  $V_i$  的一个基  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{ir_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ ,

则  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1r_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sr_s}$  是  $V$  的一个基, 且  $\mathcal{A}$  在它下的矩

阵为

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & A_s \end{pmatrix}$$

其中  $A_i \in M_{r_i}(F)$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

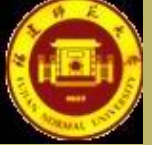
Page 14 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**问题:** 对于  $\mathcal{A} \in Hom(V, V)$ , 如何找出它的一些非平凡的不变子空间?

**命题** 对于  $\forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in Hom(V, V)$ , 若  $\mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$ ,  $Ker\mathcal{B}$ ,  $Im\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}$  的特征子空间都是  $\mathcal{A}$  的不变子空间.

由此命题可知, 对于  $\forall \mathcal{A} \in Hom(V, V)$ ,  $\forall f(x) \in F[x]$ , 有  $Ker f(\mathcal{A})$ ,  $Im f(\mathcal{A})$ ,  $f(\mathcal{A})$  的特征子空间都是  $\mathcal{A}$  的不变子空间.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 15 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**问题:** 能否找到一些多项式  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x) \in F[x]$ , 使得

$$V = \text{Ker } f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker } f_2(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus \text{Ker } f_s(\mathcal{A}) ?$$

**命题** 对于  $\forall \mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若在  $F[x]$  中,  $f(x) = f_1(x)f_2(x)\dots f_s(x)$ , 其中  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$  两两互素, 则

$$\text{Ker } f(\mathcal{A}) = \text{Ker } f_1(\mathcal{A}) \oplus \text{Ker } f_2(\mathcal{A}) \oplus \dots \oplus \text{Ker } f_s(\mathcal{A})$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 16 of 35

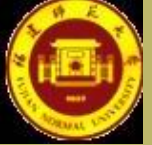
Go Back

Full Screen

Close

Quit





**问题:** 是否存在  $f(x) \in F[x]$  使得  $\text{Ker} f(\mathcal{A}) = V$ , 即  $f(\mathcal{A}) = 0$ ?

设  $\dim V = n$ , 则  $\dim \text{Hom}(V, V) = n^2$ , 从而  $I, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \dots, \mathcal{A}^{n^2}$  线性相关,

故存在不全为零的数  $k_0, k_1, k_2, \dots, k_{n^2}$  使得

$$k_0 I + k_1 \mathcal{A} + k_2 \mathcal{A}^2 + \dots + k_{n^2} \mathcal{A}^{n^2} = 0.$$

令

$$f(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_{n^2} x^{n^2}$$

则  $f(\mathcal{A}) = 0$ ,  $f(x)$  称为  $\mathcal{A}$  的**零化多项式**.

**问题:** 怎样轻松求出一个零化多项式?

**Hamiton-Cayley 定理** 设  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 则  $\mathcal{A}$  的特征多项式  $f(\lambda)$  是  $\mathcal{A}$  的一个零化多项式.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

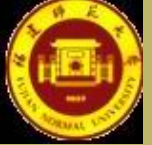
Page 17 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 18 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

设  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若  $\mathcal{A}$  的特征多项式  $f(\lambda)$  在  $F[x]$  中可分解成

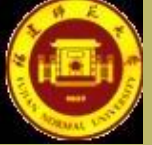
$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1} (\lambda - \lambda_2)^{r_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{r_s}$$

则

$$V = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{r_1} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})^{r_2} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{r_s}$$

其中  $\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}$  称为  $\mathcal{A}$  的根子空间.

$\text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{r_i}$  上的线性变换  $(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})|_{W_i}$  满足  $[(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})|_{W_i}]^{r_i} = 0$ .



**问题:** 是否存在次数比特征多项式的次数更低的零化多项式?

**例** 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

的特征多项式为 $(\lambda - 1)^3$ ,  $(\lambda - 1)^2$ 也是它的零化多项式, 而矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

没有次数小于3的零化多项式.

Home Page

Title Page

◀▶

◀▶

Page 19 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



### 三. 线性变换的最小多项式

设  $A \in \text{Hom}(V, V)$ , 在  $A$  的所有非零零化多项式中, 次数最低的首项系数为1的多项式称为  $A$  的**最小多项式**, 记作  $m_A(\lambda)$ .

- (1)  $A$  的最小多项式  $m_A(\lambda)$  是唯一的.
- (2)  $A$  的任意一个零化多项式都是其最小多项式的倍式.
- (3)  $A$  的最小多项式  $m_A(\lambda)$  与其特征多项式  $f(\lambda)$  在域  $F$  中有相同的根(重数可以不同).

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 20 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



下列定理给出了最小多项式的一种求法.

**定理** 设  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 如果存在  $\mathcal{A}$  的一些非平凡不变子空间  $W_1, W_2, \dots, W_s$  使得

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_s$$

则  $\mathcal{A}$  的最小多项式

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = [m_{\mathcal{A}|_{W_1}}(\lambda), m_{\mathcal{A}|_{W_2}}(\lambda), \dots, m_{\mathcal{A}|_{W_s}}(\lambda)]$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

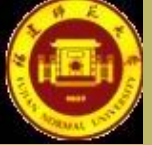
Page 21 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设  $A \in \text{Hom}(V, V)$ , 若存在一个正整数  $l$  使得  $A^l = 0$ , 则称  $A$  是**幂零变换**; 使得  $A^l = 0$  成立的最小正整数  $l$  称为**幂零指数**.

幂零指数为  $l$  的幂零变换  $A$  的最小多项式  $m_A(\lambda) = \lambda^l$ .

域  $F$  上形如

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

的一个  $r$  阶矩阵称为一个 **$r$  阶约当块**, 记作  $J_r(a)$ . 由若干个约当块组成的分块对角矩阵称为**约当形矩阵**

利用最小多项式可以刻画可对角化线性变换:

**定理** 设  $A \in \text{Hom}(V, V)$ , 则  $A$  可对角化的充分必要条件为它的最小多项式  $m_A(\lambda)$  在  $F[\lambda]$  中可分解成互不相同的一次因式乘积.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 22 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

**问题:** 如何利用最小多项式研究不可对角化的线性变换的结构?

设  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若  $\mathcal{A}$  的最小多项式  $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$  在  $F[\lambda]$  中可分解为一次因式乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$  是  $F$  中两两不同的元素, 则

$$\text{Ker } m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_1 \mathcal{I})^{l_1} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_2 \mathcal{I})^{l_2} \oplus \cdots \oplus \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_s \mathcal{I})^{l_s}$$

因  $\text{Ker } m_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = V$ , 令  $W_i = \text{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{I})^{l_i}$ ,  $i = 1, 2, \cdots, s$ , 则  $W_i$  是  $\mathcal{A}$  的不变子空间,  $i = 1, 2, \cdots, s$ , 且

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$$



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 23 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



设  $\dim W_i = n_i, i = 1, 2, \dots, s$ , 在  $W_i$  中取一个基  $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}, i = 1, 2, \dots, s$ , 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}(\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}) \\ &= (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n_1}, \dots, \alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \dots, \alpha_{sn_s}) \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\mathcal{A}|_{W_i}(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i})A_i,$$

$i = 1, 2, \dots, s$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 24 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



为了使

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}$$

最简单, 就应使 $A_i$ 最简单,  $i = 1, 2, \dots, s$ . 因此, 我们研究 $W_i$ 上的线性变换 $\mathcal{A}|_{W_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, s$ .

$\mathcal{A}|_{W_i}$ 的最小多项式是 $m_{\mathcal{A}|_{W_i}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{l_i}$ , 令 $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}|_{W_i} - \lambda_i \mathcal{I}$ , 则 $\mathcal{B}_i$ 是 $W_i$ 上的幂零指数为 $l_i$ 的幂零变换, 且

$$\mathcal{B}_i(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i}) = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in_i})(A_i - \lambda_i I_{n_i})$$

**问题:** 设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 $l$ , 能否在 $W$ 中找到一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在这个基下的矩阵最简单?



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 25 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



## 四. 幂零变换的结构

**命题** 设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in \text{Hom}(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 $l$ , 则存在 $\xi \in W$ , 使得向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

线性无关, 从而 $l \leq \dim W$ .

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 26 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



若  $l = \dim W$ , 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

是  $W$  的一个基, 从而

$$\mathcal{B}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) = (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 27 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit

若  $l < \dim W$ , 则向量组

$$\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi$$

不是  $W$  的一个基, 但由它们生成的子空间

$$\langle \mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi \rangle$$

是  $\mathcal{B}$  的不变子空间, 称为由  $\xi$  生成的  $\mathcal{B}$ -循环子空间, 记作  $Z_l(\xi; \mathcal{B})$ . 则

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}|_{Z_l(\xi; \mathcal{B})}(\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \\ &= (\mathcal{B}^{l-1}\xi, \mathcal{B}^{l-2}\xi, \dots, \mathcal{B}\xi, \xi) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Home Page

Title Page



Page 28 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**问题:**  $W$  能否分解为一些  $\mathcal{B}$ -循环子空间的直和?

先分析  $Z_l(\xi; \mathcal{B})$  的特点:

$$\forall \alpha \in Z_l(\xi; \mathcal{B})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1}\xi + \cdots + k_1\mathcal{B}\xi + k_0\xi = (k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I})\xi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = h(\mathcal{B})\xi, \quad h(\mathcal{B}) = k_{l-1}\mathcal{B}^{l-1} + \cdots + k_1\mathcal{B} + k_0\mathcal{I}$$

则

$$Z_l(\xi; \mathcal{B}) = \{h(\mathcal{B})\xi \mid h(\lambda) \in F[\lambda], h(\lambda) = 0 \text{ or } \deg h(\lambda) < l\}$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

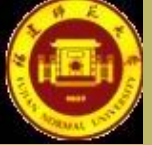
Page 29 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



因此, 引进下列概念:

设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ ,  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $W$ 的一个向量组. 对于 $\alpha \in W$ , 若存在 $h_1(\lambda), h_2(\lambda), \dots, h_s(\lambda) \in F[\lambda]$ , 使得

$$\alpha = h_1(\mathcal{B})\eta_1 + h_2(\mathcal{B})\eta_2 + \dots + h_s(\mathcal{B})\eta_s$$

则称 $\alpha$ 可由 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$   $F[\lambda]$ -表出, 称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_s$ 是 $W$ 的 $\mathcal{B}$ -生成元系.

设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ , 若 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 $W$ 的一个 $\mathcal{B}$ -生成元系, 而 $W$ 的任何 $m - 1$ 个向量都不是 $W$ 的 $\mathcal{B}$ -生成元系, 则称 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 是 $W$ 的一个**最小 $\mathcal{B}$ -生成元系**.

$W$ 一定存在最小 $\mathcal{B}$ -生成元系, 但 $W$ 的最小 $\mathcal{B}$ -生成元系不唯一.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

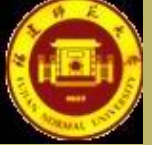
Page 30 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



利用最小 $\mathcal{B}$ -生成元系, 可得到

**定理** 设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ 是幂零变换, 则 $W$ 可分解为一些 $\mathcal{B}$ -子空间的直和.

利用上述定理, 可以得到幂零变换的结构定理.

**定理** 设 $W$ 是 $F$ 上的 $r$ 维向量空间,  $\mathcal{B} \in Hom(W, W)$ 是幂零变换, 且幂零指数为 $l$ , 则 $W$ 中存在一个基, 使得 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵 $B$ 为约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元都是0, 且阶数不超过 $l$ , 约当块总数等于 $\mathcal{B}$ 的特征子空间 $W_0$ 的维数,  $t$ 阶约当块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t) = \dim[Im(\mathcal{B}^{t+1})] + \dim[Im(\mathcal{B}^{t-1})] - 2\dim[Im(\mathcal{B}^t)]$$

这个约当形矩阵称为幂零变换 $\mathcal{B}$ 的**约当标准形**, 除了约当块的排列次序外,  $\mathcal{B}$ 的约当标准形是唯一的.

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 31 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**推论** 设 $B$ 是域 $F$ 上的幂零矩阵, 其幂零指数为 $l$ , 则 $B$ 相似于一个约当形矩阵, 其中每个约当块的主对角元为 $0$ , 且级数不超过 $l$ , 约当块的总数等于 $B$ 的特征子空间的维数(即齐次线性方程组 $BX = 0$ 的解空间的维数),  $t$ 级约当块的个数 $N(t)$ 为

$$N(t) = \text{rank } B^{t+1} + \text{rank } B^{t-1} - 2\text{rank } B^t$$

[Home Page](#)

[Title Page](#)

◀ ▶

◀ ▶

Page 32 of 35

[Go Back](#)

[Full Screen](#)

[Close](#)

[Quit](#)



## 五. 线性变换的约当标准形

利用幂零变换的结构定理, 可以得到最小多项式可分解成一次因式乘积的线性变换的结构.

**定理** 设 $V$ 是 $F$ 上的 $n$ 维向量空间,  $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ , 若 $\mathcal{A}$ 的最小多项式 $m_{\mathcal{A}}(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积:

$$m_{\mathcal{A}}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

则 $V$ 中存在一个基, 使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵 $A$ 为约当形矩阵, 其主对角元为 $\mathcal{A}$ 的全部特征值; 主对角元为 $\lambda_j$ 的约当块总数 $N_j$ 为

$$N_j = \dim V - \dim[\text{Im}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})], \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

且其中每个约当块的阶数不超过 $l_j$ ,  $t$ 阶约当块 $J_t(\lambda_j)$ 的个数 $N_j(t)$ 为

$$N_j(t) = \dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{t+1}]\} + \dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^{t-1}]\} - 2\dim\{\text{Im}[(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{I})^t]\}$$

这个约当形矩阵称为 $\mathcal{A}$ 的**约当标准形**, 除了约当块的排列次序外,  $\mathcal{A}$ 的约当标准形是唯一的.



Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

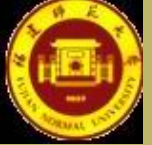
Page 33 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit



**推论** 设 $A$ 是域 $F$ 上的 $n$ 级矩阵, 若 $A$ 的最小多项式 $m(\lambda)$ 在 $F[\lambda]$ 中可分解为一次因式的乘积:

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} (\lambda - \lambda_2)^{l_2} \cdots (\lambda - \lambda_s)^{l_s}$$

则 $A$ 相似于一个约当形矩阵, 其中主对角线上的元素是 $A$ 的全部特征值; 主对角元为 $\lambda_i$ 的约当块总数 $N_j$ 为

$$N_j = n - \text{rank}(A - \lambda_i I), \quad j = 1, 2, \cdots, s,$$

且其中每个约当块的级数不超过 $l_j$ ,  $t$ 级约当块的个数 $N_j(t)$ 为

$$N_j(t) = \text{rank}(A - \lambda_j I)^{t+1} + \text{rank}(A - \lambda_j I)^{t-1} - 2\text{rank}(A - \lambda_j I)^t$$

Home Page

Title Page

◀ ▶

◀ ▶

Page 34 of 35

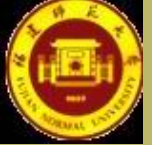
Go Back

Full Screen

Close

Quit

谢谢!



Home Page

Title Page



Page 35 of 35

Go Back

Full Screen

Close

Quit